Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 15:

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN TỔ HỢP

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

BÀI TOÁN THÀNH LẬP SỐ TỪ CÁC SỐ CHO TRƯỚC

Loại 1. Lập được số từ các số cho trước và có các chữ số khác nhau

Bài 1.
Từ bảy chữ số $0,1,2,3,4,5,6$ có thể thành lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có năm chữ số khác nhau.

<u>Lời giải:</u>
+ Chữ số hàng đơn vị là 0 thì có $1.6.5.4.3 = 360$ số.
+ Chữ số hàng đơn vị là 2 hoặc 4 ,hoặc 6 thì có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị, 5 cách chọn chữ số hàng vạn trong 6 số còn lại(số hàng vạn khác 0), vậy có 3.5.5.4.3=900 số.
Vậy tất cả có 900+360=1260 số.

Bài 2.
Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đều lớn hơn 4 và đôi một khác nhau?. Tính tổng của tất cả các số tự nhiên nói trên.

<u>Lời giải:</u>
Mỗi số ứng với một hoán vị của 5 phần tử 5,6,7,8,9. Vậy có $P_5 = 1.2.3.4.5 = 120$ số.
Sự xuất hiện của mỗi chữ số 5,6,7,8,9 ở mỗi hàng(đơn vị, chục,trăm,…) là như nhau, nên tổng tất cả các chữ số ở mỗi hàng của 120 số trên là

$$(5+6+7+8+9)\frac{120}{5} = 840$$

Suy ra tổng của 120 số là

$$840(10^0+10^1+10^2+10^3+10^4) = 840.11111 = 9333240$$

Bài 3.
Có 100.000 chiếc vé số được đánh số từ 00.000 đến 99.999 . Hỏi số các vé gồm 5 chữ số khác nhau là bao nhiêu?

<u>Lời giải:</u>
Theo đầu bài thì chữ số đầu tiên cũng có thể bằng 0. Vậy có 10.9.8.7.6=30240 vé số gồm 5 chữ số khác nhau.

Bài 4.
Cho các số 1,2,5,7,8. Có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ 5 chữ số trên sao cho:
1. Số tạo thành là một số chẵn.
2. Số tạo thành không có chữ số 7.
3. Số tạo thành nhỏ hơn 278.

<u>Lời giải:</u>
1. Có 2 cách chọn chữ số hàng đơn vị nên có 2.4.3=24 số chẵn.

2. Chỉ được chọn trong 4 số 1,2,5,8. Vậy có 4.3.2= $A_4^3 = 24$ số không có số 7.
3. Chữ số hàng trăm là 1 hoặc 2: Nếu là 1 thì có 1.4.3=12 số; nếu là 2 thì chỉ có đúng 8 số (275;271;258;257;251;218;217;215) nhỏ hơn 278. Vậy có 20 số nhỏ hơn 278.

Bài 5. Cho 10 chữ số 0,1,2,..,9. Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600000 xây dựng từ 10 số trên.

Lời giải:

Chữ số cuối cùng(hàng đơn vị) được chọn từ 1,3,5,7,9. Chữ số đầu tiên(hàng triệu) được chọn từ 1,2,3,4,5. Còn 4 số ở giữa được chọn từ 8 số còn lại có $A_8^4 = 1680$ cách.

+ Nếu chữ số cuối được chọn từ 7 hoặc 9(2 cách chọn) thì chữ số đầu tiên có 5 cách chọn, vậy có 2.5.1680=16.800 cách chọn.

+ Nếu chữ số cuối được chọn từ 1,3,5 (3 cách chọn) thì chữ số cuối có 4 cách chọn, vậy có 3.4.1680=20.160 cách chọn.

Vậy tất cả có 16.800+20.160=36960 số.

Bài 6.

Cho các chữ số 0,2,4,5,6,8,9.

1. Có thể lập được bao nhiêu số có 3 mà trong mỗi số các chữ số khác nhau.
2. Có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

Lời giải:

1. Chữ số hàng trăm phải khác 0, nên có 6 cách chọn, 2 số còn lại có 6.5=30 cách chọn, vậy có 6.6.5=180 số.
2. Chữ số hàng nghìn phải khác 0:

   + Nếu chữ số hàng nghìn là 5 thì 3 số còn lại có $A_6^3 = 120$ cách chọn, vậy có 1.120 =120 số.

   + Nếu chữ số hàng nghìn là 2 hoặc 4, hoặc 6, hoặc 8, hoặc 9 thì có 5 cách chọn. Ba số còn lại có 1 số 5 có 1 cách chọn và 2 số còn lại có $A_5^2 = 20$ cách chọn, vậy có 5.1.20=100 số.

   Vậy tất cả có 120+100=220 số.

Bài 7.

Cho các chữ số 0,1,2,3,4,5. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu:

1. Số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau.
2. Số chia hết cho 5 gồm 3 chữ số khác nhau.

Lời giải:

1. Số chẵn tận cùng là 0 có $1.A_5^3 = 1.60 = 60$ số.

Số chẵn tận cùng là 2 hoặc 4 có 2 cách chọn chữ số cuối, số hàng nghìn khác 0 nên có 4 cách chọn, 2 số còn lại có $A_4^2 = 12$ cách chọn. Vậy có 2.4.12=96 số.

Vậy tất cả có 60+96=156 số.

2. Số chia hết cho 5 phải tận cùng là 0 hoặc 5.

Nếu tận cùng là 0 thì có $A_5^2 = 20$ cách chọn 2 số còn lại, vậy có 1.20=20 số.

Nếu tận cùng là 5 thì có 4 cách chọn số hàng trăm, 4 cách chọn số hàng chục, vậy có 1.4.4=16 số.

Vậy tất cả có 20+16=36 số.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 8.
Cho 8 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số, đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.
Lời giải:
Hai chữ số hàng nghìn và đơn vị khác không nên có 7.6 cách chọn, 2 chữ số còn lại có 6.5 cách chọn, vậy có 7.6.6.5=1260 số.
Bài 9.
1. Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là số lẻ.
2. Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn(chữ số đầu tiên phải khác không).

Lời giải:
1. Chữ số đầu tiên là số lẻ nên có 5 cách chọn, chũ số cuối cùng chẵn nên có 5 cách chọn. Các số còn lại có $A_8^4 = 1680$ cách chọn, vậy có 5.5.1680=42000 số.
2. Từ 5 chữ số lẻ chọn ra 3 số có C_5^3 cách, từ 5 chữ số chẵn chọn ra 3 số có C_5^3 cách. Với 6 số này có 6! Số, trong đó số các số có chữ số 0 đầu tiên chiếm $\frac{1}{6}$. Vậy có $\frac{5}{6}.C_5^3.C_5^3.6! = 64800$ số.

Bài 10.
Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.
Lời giải:
Chữ số đầu tiên phải khác 0, nên chỉ có thể nhận các số từ 1 đến 9, với các chữ số đứng sau lớn hơn chữ số liền trước nên các chữ số khác nhau.
Chọn ra 5 số bất kỳ từ 9 số từ 1 đến 9 thì sẽ tạo được một số có các chữ số theo thứ tự tăng dần. Vậy có $C_9^5 = 126$ số.
Bài 11.
Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 thiết lập các số có 9 chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số có chữ số 9 ở vị trí chính giữa.
Lời giải:
Số các số 9 chữ số khác nhau là hoán vị của 9 số nên có 9!. Trong đó chữ số 9 có thể có mặt ở một trong 9 vị trí, nên số các số có số 9 ở vị trí chính giữa chiếm $\frac{1}{9}$, vậy có $\frac{1}{9}.9! = 8! = 40320$ số.
Bài 12.
Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau(chữ số đầu tiên khác 0) trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1.
Lời giải:
Chữ số 0 có 5 vị trí(không bao gồm vị trí đầu tiên), 5 số còn lại được chọn từ 8 số 2,3,4,5,6,7,8,9 nên có $A_8^5 = 6720$ cách chọn. Vậy có 5.6720=33600 số.
Bài 13.
Tính tổng các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ các số 1,3,4,5,7,8.
Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Số các số có 5 chữ khác nhau đôi một được lập từ 6 số đã cho là chỉnh hợp chập 5 của 6, vậy có $A_6^5 = 720$ số.

Số lần xuất hiện của mỗi một trong các số đã cho là $\frac{720}{6} = 120$, vậy tổng tất cả các số ở mỗi hàng(hàng đơn vị, chục,…) là $120(1+3+4+5+7+8) = 3360$.

Vậy tổng tất cả các số là $3360(1+10+10^2+10^3+10^4) = 37322960$.

Bài 14.

Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 thiết lập được các số có 6 chũ số khác nhau. Hỏi trong các số thiết lập được đó có bao nhiêu số mà 2 số 1 và 6 không đứng cạnh nhau.

Lời giải:

Số các số có 6 chữ số khác nhau tạo thành là $6! = 720$.

Có 2 cách để cho số 1 và số 6 đứng cạnh nhau(16 hoặc 61), coi cách ghép 2 số này với nhau được một số mới, số này cùng với 4 số còn lại có $5! = 120$ cách để lập thành một số có 6 số khác nhau, vậy có 2.120=240 số có 2 số 1 và 6 đứng cạnh nhau.

Số các số có 6 số khác nhau mà số 1 không đứng cạnh số 6 là 720-240=480 số.

Loại 2. Lập được số từ các số cho trước và các chữ số có thể trùng nhau.

Bài 1.

Xét dãy số có 7 chữ số được chọn từ các số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 thỏa mãn các tính chất sau:

- Chữ số ở vị trí số 3 là một số chẵn.
- Chữ số ở vị trí cuối không chia hết cho 5.
- Các chữ số ở vị trí thứ 4, thứ 5 và thứ 6 đôi một khác nhau.

Hỏi có tất cả bao nhiêu dãy số như vậy?

Lời giải:

Giả sử $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ là dãy số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vì a_3 chẵn nên có 5 cách chọn(0,2,4,6,8).

a_7 không chia hết cho 5 nên không thể là 0 hoặc 5, vậy có 8 cách chọn.

Vì a_4, a_5, a_6 đôi một khác nhau nên có A_{10}^3 cách chọn.

Các số còn lại mỗi số có 10 cách chọn.

Vậy có $5.8.A_{10}^3.10.10 = 2880000$ dãy số thỏa mãn đề bài.

Bài 2.

Viết các số có sáu chữ số bằng các chữ số 1,2,3,4,5(một số xuất hiện 2 lần, các số khác xuất hiện một lần). Có bao nhiêu các viết.

Lời giải:

Chẳng hạn số 1 xuất hiện 2 lần, ta cần chọn 2 vị trí để viết 2 số 1 vào có $C_6^2 = 15$ vị trí, 4 số còn lại viết vào 4 vị trí còn lại nên có 4!=24 cách, vậy có 15.24=360 số mà số 1 xuất hiện 2 lần và các số khác xuất hiện 1 lần.

Vai trò của năm số 1,2,3,4,5 là như nhau, vậy tất cả có 5.360=1800 số thỏa mãn bài toán.

Bài 3.

Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau nhỏ hơn 10000 được tạo thành từ 5 số 0,1,2,3,4.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Các số cần tìm nhỏ hơn 10000 không thể có từ 5 chữ số trở lên
+ Số có một chữ số có 5 số.
+ Số có 2 chữ số(số hàng chục khác 0) có 4.5=20 số.
+ Số có 3 chữ số(số hàng trăm khác 0) có 4.5.5=100 số.
+ Số có 4 chữ số(số hàng nghìn khác 0) có 4.5.5.5=500 số.
Vậy tất cả có 5+20+100+500=625 số.

Bài 4.

Có bao nhiêu số khác nhau gồm bảy chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số chẵn.

Lời giải:

Chọn các chữ số từ trái(số hàng triệu) sang phải(số hàng đơn vị).

Chữ số thứ nhất phải khác 0 nên có 9 cách chọn, 5 chữ số tiếp theo mỗi số có 10 cách chọn. Chữ số cuối cùng có 10 cách chọn nhưng có 5 cách chọn để cho tổng của tất cả 7 chữ số chẵn và 5 cách để cho tổng của bảy chữ số lẻ, vậy số cuối có 5 cách chọn.

Vậy tất cả có $9.10^5.5 = 4500000$ số.

Bài 5.

Có thể lập được bao nhiêu gồm 8 chữ số từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 trong đó các chữ số 1 và 6 có mặt 2 lần và các số khác có mặt 1 lần.

Lời giải:

Chọn 2 trong 8 vị trí để viết 2 số 1 vào có C_8^2 cách, chọn 2 trong 6 vị trí còn lại viết 2 số 6 vào có C_6^2 cách.

Bốn số còn lại 2,3,4,5 xếp vào 4 vị trí còn lại có 4! cách.

Vậy có $C_8^2.C_6^2.4! = 28.15.24 = 10080$ số.

Bài 6.

Từ 3 chữ số 1,2,3 có thể lập được bao nhiểu số có 5 chữ số có mặt cả chữ số trên?

Lời giải:

Có 2 trường hợp

TH1: Số này có một số xuất hiện 3 lần và các số khác xuất hiện một lần

Chẳng hạn số 1 xuất hiện 3 lần, thì có C_5^3 cách chọn vị trí cho 3 số 1, và 2 số còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có 2! Cách, vậy có $C_5^3.2! = 20$ số.

Do vai trò của 1,2,3 là như nhau nên.

Vậy trong trường hợp này có 3.20 =60 số.

TH2: Số này có một số xuất hiện 1 lần và hai số kia mỗi số xuất hiện 2 lần.

Chẳng hạn số 1 xuất hiện 1 lần, thì có C_5^1 cách chọn vị trí cho số 1, có C_4^2 cách chọn vị trí cho số 2, và xếp 2 số 3 vào 2 vị trí còn lại có 1 cách. Vậy có $C_5^1.C_4^2.1 = 30$ số.

Do vai trò như nhau của 1,2,3 nên.

Vậy trong trường hợp này có 3.30=90 số.

Vậy tất cả có 60+90=150 số thỏa mãn bài toán.

Bài 7.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần.

Lời giải:

Có tất cả 9000 số từ 1000 đến 9999 có 4 chữ số. Trong các số này có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

9 số có số 0 lặp lại 3 lần (có dạng là $\overrightarrow{a000}, 1 \le a \le 9$). Số có 4 chữ số mà có 3 chữ số 1 lặp lại có dạng $\overrightarrow{a111}, 1 \le a \le 9; \overrightarrow{1b11}; \overrightarrow{11b1}; \overrightarrow{111b}, , 0 \le b \le 9; a, b \ne 1$ Nên a có 8 giá trị, b có 9 giá trị vậy có 8+3.9=35 số có 3 chữ số 1. Tương tự có 35 số có 3 chữ số 2, 35 số có 3 chữ số 3,…, 35 số có 3 chữ số 9. Vậy có 9000 – (9+9.35)=8676 số thỏa mãn bài toán.

Bài 8.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số(số đầu tiên khác 0), biết rằng chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần.

<u>Lời giải:</u>

+ Chọn 2 vị trí cho 2 số 2 có C_7^2 cách chọn, tiếp theo chọn 3 vị trí cho 3 số 3 có C_5^3 cách chọn, còn 2 vị trí ta cần xếp 2 chữ số trong 8 số 0,1,4,5,6,7,8,9 vào 2 vị trí này có A_8^2 cách. Vậy có $C_7^2.C_5^3.A_8^2 = 11760$ số. Nhưng trong các số này có các số có số 0 đứng đầu, ta cần loại bỏ các số này.

+ Cho số 0 vào vị trí đầu tiên có 1 cách, tiếp theo chọn 2 vị trí cho 2 số 2 có C_6^2 cách chọn, chọn 3 vị trí cho 3 số 3 có C_4^3 cách chọn,và chọn một trong 7 số 1,4,5,6,7,8,9 xếp vào vị trí còn lại có 7 cách. Vậy có $1.C_6^2.C_4^3.7 = 420$ số.

Vậy các số thỏa mãn đề bài là 11760 – 420 =11340.

BÀI TOÁN CÁCH CHỌN

Bài 1.

Cho 2 đường thẳng song song d_1, d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1, d_2.

<u>Lời giải:</u>

Tam giác tạo thành nếu có một đỉnh trên d_1 và 2 đỉnh còn lại trên d_2 hoặc là một đỉnh trên d_2 và 2 đỉnh còn lại trên d_1.

<u>TH1:</u> Chọn một trong 17 điểm trên d_1 có C_{17}^1 cách và 2 trong 20 điểm trên d_2 có C_{20}^2 cách, vậy có $C_{17}^1.C_{20}^2 = 3230$ tam giác.

<u>TH2:</u> Chọn một trong 20 điểm trên d_2 có C_{20}^1 cách và 2 trong 17 điểm trên d_1 có C_{17}^2 cách, vậy có $C_{17}^2.C_{20}^1 = 2720$ tam giác.

Vậy tất cả có 2720+3230=5950 tam giác.

Bài 2.

Một đa giác lồi n cạnh thì có bao nhiêu đường chéo. Tính số giao điểm của các đường chéo trong đa giác.

<u>Lời giải:</u>

Vì là đa giác lồi nên không có 3 đỉnh nào thẳng hàng, do đó qua 2 đỉnh của đa giác kẻ được một đường thẳng riêng biệt.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Số đường thẳng nối giữa 2 đỉnh của đa giác là C_n^2, trong số những đường thẳng này có n đường thẳng chính là cạnh của đa giác. Vậy số đường chéo của đa giác là

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

+ Cứ 4 đỉnh của đa giác cho ta 2 đường chéo cắt nhau tại một điểm trong đa giác, vậy số giao điểm của các đường chéo trong đa giác là

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Bài 3.

Cho một đa giác lồi n cạnh $(n > 3)$.

1. Tìm số giao điểm tối đa của các đường thẳng đi qua n đỉnh của đa giác, không kể tại đỉnh của đa giác.
2. Giả sử 2 đường chéo bất kỳ của đa giác không song song và 3 đường chéo không cùng đi qua một đỉnh thì không đồng quy. Hãy tìm số giao điểm của tất cả các đường chéo, không kể giao điểm ở các đỉnh đa giác và giao điểm nằm ngoài đa giác.

Lời giải:

1. Số đường thẳng nối 2 đỉnh của đa giác là $m = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

   Hai đường thẳng cắt nhau tại nhiều nhất 1 điểm, nên số giao điểm tối đa của các đường thẳng này là

   $$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2} - 1\right]}{2} = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n-2).$$

   Nhưng tại mỗi đỉnh có $(n-1)$ đường thẳng cắt nhau tại đỉnh này với $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ giao điểm trùng nhau tại đỉnh đó, nên với n đỉnh sẽ có $nC_{n-1}^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ giao điểm trùng ở các đỉnh của đa giác.

   Vậy số giao điểm tối đa không kể tại các đỉnh là

   $$\frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n-2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

2. Ta có số đường chéo của đa giác là $m = C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Số giao điểm của m đường chéo là C_m^2

Tại mỗi đỉnh của đa giác là giao điểm của $(n-3)$ đường chéo, nên số giao điểm trùng tại đỉnh của $(n-3)$ đường chéo này là C_{n-3}^2, nhưng do có n đỉnh nên số giao điểm trùng tại n đỉnh của đa giác là nC_{n-3}^2.

Vậy số giao điểm của các đường chéo không kể tại đỉnh của đa giác là $C_m^2 - nC_{n-3}^2$.

Mặt khác lại có số giao điểm của các đường chéo nằm trong đa giác là C_n^4.

Vậy số giao điểm nằm ngoài đa giác cần tìm là

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$C_m^2 - nC_{n-3}^2 - C_n^4 = \frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)$.

Bài 4.

Cho tam giác ABC. Xét tập hợp 4 đường thẳng song song với AB, 5 đường thẳng song song với BC và 6 đường thẳng song song với CA. Hỏi các đường thẳng này tạo được bao nhiêu tam giác và bao nhiêu hình thang(không kể hình bình hành).

Lời giải:

Mỗi ta giác được tạo thành bởi 3 đường thẳng thuộc 3 họ khác nhau, vậy có 4.5.6=120 tam giác.
Mỗi hình thang được tạo thành bởi 2 đường thẳng ở một họ và 2 đường thẳng kia ở 2 họ còn lại, vậy có

$C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 720$ hình thang.

Bài 5.

Đa giác lồi 10 cạnh. Xét các tam giác là 3 đỉnh của đa giác lồi này. Hỏi trong số các tam giác đó có bao nhiêu tam giác mà cả 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác lồi.

Lời giải:

Có tất cả $C_{10}^3 = 120$ tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác lồi. Trong đó có 10.6=60 tam giác có đúng một cạnh của đa giác lồi, và 10 tam giác chứa đúng 2 cạnh của đa giác lồi.
Vậy có 120 – 60 – 10 =50 tam giác không có cạnh nào là của đa giác.

Bài 6.

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n} (n \geq 2, n \in \mathbb{Z})$ nội tiếp đường tròn tâm (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$, tìm n.

Lời giải:

Số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ là C_{2n}^3.

Hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ cũng nội tiếp trong đường tròn tâm (O). Nên có 2 đường chéo qua tâm O, hay hình chữ nhật được tạo thành bởi mỗi 2 đường chéo qua tâm O. Số đường chéo qua tâm O của đa giác đều 2n cạnh là n, vậy số hình chữ nhật là C_n^2.

Theo giả thiết ta có

$C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8$.

Bài 7.

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người trong đó, có 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

Lời giải:

Chọn 4 nam trong 12 nam và 1 nữ trong 3 nữ về giúp đỡ tỉnh thứ nhất có $C_{12}^4.C_3^1$ cách, tiếp theo chọn 4 nam trong 8 nam còn lại và 1 nữ trong 2 nữ còn lại về giúp đỡ tỉnh thứ 2 có $C_8^4.C_2^1$, còn lại 4 nam và 1 nữ cho về giúp đỡ tỉnh thứ ba có 1 cách.

Vậy có $C_{12}^4.C_3^1.C_8^4.C_2^1.1 = 207900$ cách.

Bài 8.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Trong một môn học thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải đủ 3 loại câu hỏi(khó,trung bình và dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

<u>Lời giải:</u>

Số câu hỏi dễ không ít hơn 2 nên có các trường hợp sau

<u>TH1:</u> Đề kiểm tra gồm 2 câu dễ, 2 câu khó và 1 câu trung bình, trường hợp này có $C_{15}^2.C_5^2.C_{10}^1 = 105.10.10 = 10500$ đề.

<u>TH2:</u> Đề kiểm tra gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó, trường hợp này có $C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 = 105.45.5 = 23625$ đề.

<u>TH3:</u> Đề kiểm tra gồm 3 câu dễ, 1 câu khó và 1 câu trung bình, trường hợp này có $C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 = 455.10.5 = 22750$ đề.

Vậy có tất cả 10500+23625+22750=56875 đề.

Bài 9.

Một lớp có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Cần chọn một nhóm gồm 3 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách:

1. Chọn 3 học sinh bất kỳ.
2. Chọn 3 học sinh gồm 1 nam và 2 nữ.
3. Chọn 3 học sinh trong đó có ít nhất 1 nam.

<u>Lời giải:</u>

1. Mỗi cách chọn là một tổ hợp chập 3 của 40, vậy có $C_{40}^3 = 9880$ cách.
2. Có C_{25}^1 cách chọn 1 nam, có C_{15}^2 cách chọn 2 nữ, vậy có $C_{25}^1.C_{15}^2 = 2625$ cách chọn 1 nam và 2 nữ.
3. Cách chọn không có nam có $C_{15}^3 = 455$, vậy có 9880 – 455=9425 cách chọn có ít nhất 1 nam.

Bài 10.

Một đội xây dựng gồm 10 công nhân và 3 kỹ sư, để lập một tổ công tác cần chọn một kỹ sư là tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập tổ công tác.

<u>Lời giải:</u>

Có C_3^1 cách chọn 1 kỹ sư là tổ trưởng, có 10 cách chọn 1 công nhân trong 10 công nhân làm tổ phó và có C_9^5 cách chọn 5 công nhân làm tổ viên. Vậy có $C_3^1.10.C_9^5 = 3780$ cách lập tổ công tác.

Bài 11.

Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên bi không có đủ cả 3 màu?

<u>Lời giải:</u>

Số cách lấy ra 4 viên bi từ hộp này là $C_{15}^4 = 1365$ cách.

Cách lấy ra 4 viên bi có đủ cả 3 màu, có các trường hợp là

TH1: Lấy ra 2 viên bi đỏ, 1 viên bi trắng và 1 viên bi vàng có $C_4^2.C_5^1.C_6^1 = 180$ cách.

TH2: Lấy ra 2 viên bi trắng, 1 viên bi đỏ và 1 viên bi vàng có $C_4^1.C_5^2.C_6^1 = 240$ cách.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TH3: Lấy ra 2 bi vàng, 1 bi đỏ và 1 bi xanh có $C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 300$

Vậy có 180+240+300=720 cách lấy ra 4 viên bi có đủ 3 màu

Vậy có 1365 – 720 = 645 cách lấy ra 4 viên bi không có đủ cả 3 màu.

Bài 12.

Có n học sinh nam và n học sinh ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để không có 2 học sinh cùng giới ngồi cạnh nhau.

Lời giải:

Đánh số ghế từ 1 cho đến 2n, nếu số nam ngồi ở số ghế chẵn thì số n sẽ ngồi ở số ghế lẻ, và có n! cách xếp chỗ chon am và n! cách xếp chỗ cho nữ, vậy có $(n!)^2$ cách xếp.

Nếu số nam ngồi ghế lẻ, số nữ ngồi ghế chẵn thì có $(n!)^2$ cách xếp.

Vậy tất cả có $2(n!)^2$ cách sắp xếp.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.

Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thong có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Bài 2.

Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu cháu ngoan Bác Hồ(trong đó có 4 cặp an hem sinh đôi). Cần chọn một nhóm 3 học sinh trong số 50 học sinh trên đi dự Đại hội Cháu ngoan Bác Hồ, sao cho trong nhóm không có cặp an hem sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Bài 3.

Một tổ sinh viên có 20 em, trong đó 8 em chỉ biết Tiếng Anh, 7 em chỉ biết Tiếng Pháp và 5 em chỉ biết Tiếng Đức. Cần lập nhóm đi thực tế gồm 3 em biết Tiếng Anh, 4 em biết Tiếng Pháp và 2 em biết Tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm đi thực tế từ tổ sinh viên ấy?

Bài 4.

Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người . Trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người ở địa điểm B,còn 4 người thường trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

Bài 5.

Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng có kích thước đôi một khác nhau.

1. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó có 2 viên bi đỏ.
2. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, sao cho số bi xanh bằng số bi đỏ.

Bài 6.

Thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau gồm 5 cuốn văn học, 4 cuốn âm nhạc và 3 cuốn hội họa. Ông lấy ra 6 cuốn để tặng 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một cuốn.

1. Có bao nhiêu cách nếu thầy chỉ muốn tặng cuốn sách văn học và âm nhạc.
2. Có bao nhiêu cách để sau khi tặng, thầy vẫn còn ít nhất mỗi loại một cuốn.

Bài 7.

Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 học sinh khá và 8 trung bình. Có bao nhiêu cách chia 16 học sinh này thành 2 nhóm, mỗi nhóm 8 người sao cho mỗi nhóm đều có học sinh giỏi và có ít nhất 2 học sinh khá.

Bài 8.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Có bao nhiêu cách xếp năm học sinh A, B, C, D, E vào một ghế dài sao cho

1. C ngồi chính giữa ghế.
2. A và E ngồi ở 2 đầu ghế.

Bài 9.
Một đoàn tàu có 3 toa chở khách là toa I, toa II, toa III. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị lên tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống.

1. Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa đó.
2. Có bao nhiêu cách sắp xếp để cho 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong số 4 vị khách trên.

Bài 10.
Một nhóm gồm 10 học sinh, gồm 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh này thành một hàng dọc sao cho 7 học sinh nam đứng liền nhau.

Bài 11. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông $ABCD$ lần lượt lấy $1, 2, 3$ và n điểm phân biệt khác A, B, C, D. Tìm n, biết số tam giác có ba đỉnh từ $n+6$ điểm đã cho là 439.

Bài 12. Có 3 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B, 5 học sinh lớp C. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 học sinh từ các lớp trên sao cho mỗi lớp đều có ít nhất một học sinh được chọn.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam